Физика. Теория. 10 класс *†

Версия от 09/04/2022 21:03:09

Содержание

*Актуальную версию pdf можно найти тут: `https://www.dshpr.com/fml31-theory/`

†Если нашли ошибку, сделайте этот мир чуть лучше: `https://github.com/DanShaders/fml31-theory`

1 Основы МКТ

1.1 Основные положения МКТ

1. Все тела состоят из частиц. Молекула – мельчайшая частица вещества, обладающая его основными химическими свойствами. Атом – мельчайшая частица элементарного вещества, <...>
2. Все структурные элементы вещества движутся хаотично и непрерывно. Это явление называют тепловым движением.
3. Между частицами существуют силы взаимодействия: притяжения и отталкивания, зависящие только от расстояния.

1.2 Количество вещества и молекулярные массы

Относительная молекулярная масса – отношение массы молекулы данного вещества к $\frac{1}{12}$ массы атома ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$. [о. е. м., безразмерная]

$$M_r = \frac{m_0}{\frac{1}{12}m_{0\mathrm{C}}}$$

Абсолютная масса – масса частицы данного вещества. [а. е. м., кг]
Атомная единица массы – единица измерения массы, равная $\frac{1}{12}$ массы атома ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$.
Моль – количество вещества, содержащееся в теле с числом молекул, численно равным постоянной Авогадро.
Постоянная Авогадро – постоянная, равная $N_A = 6.022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ (точно) и приближенно равная количеству атомов в 12 граммах ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$.
Количество вещества – мера количества молекул в веществе. [моль]

$$\nu = \frac{N}{N_A}$$

Молярная масса – масса вещества, взятого в количестве одного моля. [$\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$]

$$M = m_0 N_A = 10^{-3} M_r \,\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

1.3 Взаимодействие молекул

Броуновское движение – беспорядочное движение взвешенной частицы в жидкости или газе.
Тепловое движение – беспорядчное движение молекул в теле.
Связанное состояние молекул – состояние, при котором две молекулы совершают колебательные движения.

Сила, возникающая между двумя молекулами (утв. без доказательства)

$$F(r) = -\frac{a}{r^7} + \frac{b}{r^{13}}$$

Потенциальная энергия взаимодействия молекул:

$$E_\text{п}(r) = -\int F(r)dr = -\frac{7a}{r^8} + \frac{13b}{r^{14}} + c = -\frac{7a}{r^8} + \frac{13b}{r^{14}}$$

(Константа c равна 0, т. к. по соглашению, $\lim\limits_{r\to\infty} E_\text{п}(r) = 0$)

2 Температура. Газовые законы

2.1 Основые определения

Термодинамическая система – макроскопическое тело или группа макроскопических тел.
Макроскопические параметры – величины, характеризующие состояние термодинамической системы без учета молекулярного строения тел.
Идеальный газ – теоретическая математическая модель газа; в которой пренебрегают размерами частиц газа, не учитывают силы взаимодействия между частицами газа, предполагая, что средняя кинетическая энергия частиц много больше энергии их взаимодействия, и считают, что столкновения частиц газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие, как следствие, он в точности подчиняется газовым законам.
Тепловое равновесие (равновесное термодинамическое состояние) – состояние, при котором все макроскопические параметры тела сколь угодно долго остаются неизменными.
Температура – мера средней кинетической энергии молекул. [°C, K, °F] Если в системе все тела имеют одинаковую температуру, то она будет находиться в состоянии теплового равновесия.
Аболютный ноль – температура, при которой прекращается тепловое движение. С точки зрения квантовой физики при абсолютном нуле температуры существуют нулевые колебания, которые обусловлены квантовыми свойствами частиц и физического вакуума, их окружающего.
Термодинамический процесс – процесс, при котором изменяются термодинамические парамеры.
Равновесный процесс – процесс, при котором система проходит непрерывный ряд бесконечно близких равновесных термодинамических состояний.
Неравновесный процесс – процесс, при котором в системе нарушается тепловое равновесие.
Время релаксации – время, в течение которого система после совершения неравновесного процесса возвращается в состояние теплого равновесия.
Квазистатический (квазиравновесный) процесс – относительно медленный процесс, длительность протекания которого много больше времени релаксации системы.
Только квазистатические процессы можно изображать на pV диаграмме сплошной линией.

2.2 Процессы изменения состояния термодинамической системы

Изотермический процесс – процесс изменения состояния термодинамической системы при постоянной температуре.
Изобарный процесс – процесс изменения состояния термодинамической системы при постоянном давлении.
Изохорный процесс – процесс изменения состояния термодинамической системы при постоянном объёме.
Парциальное давление – давление, которое бы имел бы газ из смеси, если удалить из объёма остальные газы.

Закон Бойля-Мариотта (эксперимент)
При постоянной температуре и массе произведение давления газа на его объём постоянно.

$$pV = \mathrm{const}$$

Закон Гей-Люссака (эксперимент)
При постоянном давлении и массе относительное изменение объёма газа прямо пропорционально изменению температуры.

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha \Delta t \text{ или } \frac{V}{T} = \text{const}$$

Закон Авогадро (эксперимент)
Различные газы, взятые в количестве 1 моль, имеют одинаковые объёмы при одинаковых давлениях и температуре.

Закон Дальтона (эксперимент)
Для достаточно разреженных газов давление смеси газов равно сумме парциальных давлений газов смеси.

$$p = \sum p_i$$

2.3 Состояние идеального газа

Уравнение Клапейрона
Для данной массы газа произведение давления газа данной массы на его объём, деленное на термодинамическую температуру, постоянно.

$$\frac{pV}{T} = \text{const}$$

Доказательство. Разобьём процесс, который происходит над газом на два: первый - изобарное изменение объёма и температуры и второй - изотермическое изменение объёма и давления.

$$\begin{cases} p_1 = p_2 \\ T_2 = T_3 \\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ (по закону Гей-Люссака для процесса 1)} \\ p_2V_2 = p_3V_3 \text{ (по закону Бойля-Мариотта для процесса 2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_3} \\ p_1V_2 = p_3V_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2 = \frac{V_1T_3}{T_1} \\ V_2 = \frac{p_3V_3}{p_1} \end{cases}$$

$$\frac{p_3V_3}{p_1} = \frac{V_1T_3}{T_1}$$

$$\frac{p_3V_3}{T_3} = \frac{p_1V_1}{T_1}$$

■

Отношение произведения давления газа на его молярный объём к температуре постоянно для всех газов.

Доказательство. По уравнению Клапейрона утверждение, очевидно, выполняется для одного газа.
Рассмотрим два различных газа. Зафиксируем температуру и давление, тогда по закону Авогадро газы будут занимать одинаковый объём $\Rightarrow$ значение рассмотренного отношения для них будет равно. ∎

Универсальная газовая постоянная – произведение давления газа на его молярный объём, делённое на температуру.

$$R = 8.314\,462\,618\,153\,24\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}\ \text{(точно)}$$

Уравнение Менделеева-Клапейрона
Для газа выполняется:

$$pV = \nu RT$$

Доказательство. По определению R:

$$R = \frac{pV_M}{T}$$
$$R = \frac{pV}{\nu T}$$
$$pV = \nu RT$$

∎

Закон Шарля
При постоянном объёме и массе давление газа прямо пропорциально абсолютной температуре.

$$\frac{p}{T} = \text{const}$$

Доказательство. По уравнению Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \nu RT$$

$$p = \frac{\nu R}{V}T$$

$$p = \frac{mR}{MV}T$$

$$\frac{p}{T} = \frac{mR}{MV} = \text{const}$$

∎

3 Газы в МКТ

Основное допущение статистической механики – среднее по времени значение физическое величины совпадает со статистическим средним в эти моменты времени.

3.1 Основное уравнение МКТ

Основное уравнение МКТ
Для идеального газа выполняется:

$$p = \frac{1}{3} m_0 \cdot n \cdot \overline{v^2}$$

Доказательство. Картинка для визуализации происходящего есть на стр. 112 учебника. Возьмём объём газа и, рассмотрев время Δt, определим переданный частицами газа стенке импульс:

$$P = \sum_{v_{ix}>0} P(v_{ix}) = \sum_{v_{ix}>0} (N(v_{ix}) \cdot P_0(v_{ix})) = \sum_{v_{ix}>0} (N(v_{ix}) \cdot 2m_0 v_{ix}) = \sum_{v_{ix}>0} (n(v_{ix}) \cdot V(v_{ix}) \cdot 2m_0 v_{ix}) =$$

$$= \sum_{v_{ix}>0} (n(v_{ix}) \cdot S\Delta t v_{ix} \cdot 2m_0 v_{ix}) = (2S\Delta t \cdot m_0) \cdot \sum_{v_{ix}>0} (n(v_{ix}) \cdot v_{ix}^2) = (2S\Delta t \cdot m_0 \cdot n) \cdot \sum_{v_{ix}>0} \frac{n(v_{ix}) \cdot v_{ix}^2}{n} =$$

$$= (2S\Delta t \cdot m_0 \cdot n) \cdot \frac{1}{2} \sum_{v_{ix}} \frac{n(v_{ix}) \cdot v_{ix}^2}{n} = S\Delta t \cdot m_0 \cdot n \cdot \overline{v_x^2}$$

$$F\Delta t = S\Delta t \cdot m_0 \cdot n \cdot \overline{v_x^2}$$

$$F\Delta t = \frac{1}{3} S\Delta t \cdot m_0 \cdot n \cdot \overline{v^2}$$

$$F = \frac{1}{3} S \cdot m_0 \cdot n \cdot \overline{v^2}$$

$$p = \frac{1}{3} m_0 \cdot n \cdot \overline{v^2}$$

■

3.2 Следствия из основного уравнения

По определению средней кинетической энергии постпательного движения молекул ($\overline{E} = \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}$) несложно показать, что для идеального газа выполняется

$$p = \frac{2}{3} n \overline{E} \tag{3.2.1}$$

Постоянная Больцмана – универсальная газовая постоянная, делённая на число Авогадро.

$$k = \frac{R}{N_A} = 1.380\,649 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}\ \text{(точно)}$$

По уравнению Менделеева-Клапейрона можно показать, что

$$\overline{E} = \frac{3}{2} kT \tag{3.2.2}$$

Подставив в 3.2.1 кинетическую энергию, выраженную 3.2.2, получим

$$p = nkT$$

Среднеквадратичная скорость – квадратный корень из среднего квадрата скорости молекулы.

$$v_{\text{кв.}} = \sqrt{\overline{v^2}}$$

Заменив кинетическую энергию определением в 3.2.2 получим

$$v_{\text{кв.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

3.3 Средняя скорость броуновской частицы

Броуновская частица также участвует в тепловом движении, а значит её средняя кинетическая энергия совпадает с средней энергией частиц, значит (если m – масса частицы):

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \text{ (будет доказано в пункте 4)}$$

$$v_{\text{к. в.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

3.4 Внутренняя энергия газа

Внутренняя энергия газа – название той части полной энергии термодинамической энергии, которая не зависит от выбора системы отсчета. [Дж]

$$U = N \cdot (\overline{E_{\text{к}}} + \overline{E_{\text{п}}})$$

Потенциальная энергия неположительна; только у идеального газа равна 0 (т. к. по определению мы считаем, что молекулы не взаимодействуют друг с другом).
Для идеального газа справедливо:

$$U = N \cdot E_{\text{к}} = \nu N_A \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \nu RT$$

Количество степеней свободы – количество независимых координат, однозначно определяющих положение частицы в пространстве.

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$$

Для газа, у молекул которого i степеней свободы (у одноатомного – 3, двухатомного (1D молекул) – 5, остальных (2D молекул) – 6) средняя кинетическая энергия будет больше в $\frac{i}{3}$ раз, чем для одноатомного газа. Соответственно,

$$p = \frac{2}{i} n\overline{E}$$

$$\overline{E} = \frac{i}{2} kT$$

$$U = \frac{i}{2} \nu RT \tag{3.4.1}$$

Применив закон Менделеева-Клапейрона к (3.5.1), получим:

$$U = \frac{i}{2} pV$$

4 Распределения скоростей молекул *

4.1 Основные понятия

Распределение вероятностей – закон, описывающий область значений случайной величины и соответствующие вероятности появления этих значений.
Плотность распределения случайной величины ξ – один из способов описания распределения вероятности; функция такая, что если её первообразная $F(x)$, то $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ и $\forall x_0 < x_1 : F(x_1) - F(x_0) = P(x0 \leqslant \xi \leqslant x1)$.
Наиболее вероятное значение случайной величины – ордината максимального значения плотности вероятности этой случайной величины.
Дисперсия случайной величины σ^2 – среднее значение квадрата случайной величины.
Нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$ – распределение, плотность вероятности которого равна

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Для распределения $N(\mu, \sigma^2)$ справедливо, что его среднее и медиана - μ, а дисперсия - σ^2.

4.2 Распределение Максвелла

Плотность распределение скоростей по одной из осей равна

$$\varphi(v) = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

Доказательство. Т. к. средняя скорость по одной из осей – это величина, являющаяся средним арифметическим большого количества мало зависимых величин, распределённых примерно одинакого, то по центральной предельной теореме следует, что распределение скоростей стемится к нормальному.
$\overline{v_x} = 0$, а $\overline{v_x^2} = \frac{p}{m_0 n} = \frac{kT}{m_0}$, значит, что распределение скоростей равно $N(0, \frac{kT}{m_0})$. Значит плотность вероятности равна:

$$\varphi(v) = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

■

Распределение Максвелла
Плотность распределения скоростей молекул в идеальном газе

$$f(v) = 4\pi (\frac{m_0}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2$$

Доказательство. Предположим, что проекции скорости молекулы на оси независимы, тогда

$$\mathrm{d}f(v_x, v_y, v_z) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z$$

$$\mathrm{d}f(v_x, v_y, v_z) = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z$$

$$\mathrm{d}f(v_x, v_y, v_z) = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z$$

Проинтегрируем по всем скоростям с модулем от v до $v+\mathrm{d}v$. Они находятся вне шара радиусом v и внутри шара радиусом $v + \mathrm{d}v$. Соответственно, объём этого пространства – $4\pi v^2 \mathrm{d}v$ или с другой стороны – $\int_v \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z$.

$$\mathrm{d}f(v) = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 \mathrm{d}v$$

Интегрируя, получаем

$$f(v) = 4\pi(\frac{m_0}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2$$

■

Наиболее вероятная скорость молекулы

$$v_{\text{н. в.}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Доказательство. Возьмём производную распределения Максвелла и приравняем её нулю для получения ординаты экстремиума:

$$\mathrm{d}f = 8\pi(\frac{m_0}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} v e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} (-\frac{m_0 v^2}{2kT} + 1)\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}f = 0$$

$$v_{\text{н. в.}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

■

Средняя скорость молекулы

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

Доказательство. Пусть $b = \frac{m_0}{2\pi kT}$, тогда

$$\overline{v} = \int_0^{+\infty} v f(v)\,\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty} 4\pi(\frac{m_0}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^3\,\mathrm{d}v = 4\pi^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-bv^2} v^3\,\mathrm{d}v = (1)$$

$t = bv^2$, тогда $\mathrm{d}t = 2bv\,\mathrm{d}v$

$$(1) = 4\pi^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t}{b} \frac{\mathrm{d}t}{2b} = 2(\pi b)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-t} t\,\mathrm{d}t = (2)$$

Для последнего интеграла воспользуемся интегрированием по частям, $\int f\,\mathrm{d}g = fg - \int g\,\mathrm{d}f$, где $f = t$, $\mathrm{d}g = e^{-t}\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}f = \mathrm{d}t$, $g = -e^{-t}$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t\,\mathrm{d}t = (-e^{-t} x)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + (-e^{-t})\Big|_0^{+\infty} = 1$$

$$(2) = 2(\pi b)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

■

5 Термодинамика

5.1 Работа газа

Для любого газа выполняется:

$$A = \int_A^B p \cdot \mathrm{d}V \tag{5.1.1}$$

Геометрический смысл 5.1.1: работа газа равна площади под графиком в координатах p от V. Очевидно, что при сжатии газа работа газа отрицательна; при расширении - положительна.

5.2 Первое начало термодинамики

Теплота – энергия, которой могут обмениваться тела без совершения работы.
Адиабатический процесс – процесс, проходящий без обмена теплом с окружающей средой. Быстропротекающие процессы и процессы, проходящие в теплоизолированных сосудах, как правило, адиабатические.

Первое начало термодинамики (в дифференциальном виде)
Количество тепла, которое передаётся телу, расходуется им на изменение внутренней энергии и совершение работы.

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A$$

5.3 Второе начало термодинамики

Переменная состояния – физическая величина, характеризующая состояние термодинамической системы, и допускающая измерение с заданной точностью.
Функция состояния – физическая величина, рассматриваемая как функция нескольких независимых переменных состояния, которая зависит только от текущего состояния системы, а не пути термодинамического процесса.
Обратимый процесс – процесс перехода из начального состояния в конечное, если возможно вернуть систему хотя бы одним способом в исходное состояние, причём так, чтобы во всех остальных телах не произошло изменений.
Процесс распределения газа по всему объёму сосуда из его части необратим.
Энтропия – мера необратимости рассеяния энергии; функция состояния системы, равная отношению приобретённой (или потерянной) энергии к термодинамической температуре. $[\frac{\text{Дж}}{\text{К}}]$

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}$$

В состоянии термодинамического равновесия энтропия замкнутой системы максимальна.
Пусть количество микросостояний, которые соответствуют текущим переменным состояния системы ω, тогда

$$S = k \ln \omega$$

В адиабатном процессе энтропия не изменяется, т. к. $\delta Q = 0$

Второе начало термодинамики (формулировка 1)
Любая замкнутая система стремится к максимуму энтропии.

В открытых системах при некоторых условиях энтропия может уменьшаться.

Вечный двигатель I рода – гипотетическое устройство, нарушающее первое начало термодинамики.

Вечный двигатель II рода – гипотетическое устройство, нарушающее второе начало термодинамики. **Пример:** давайте охладим мировой океан на 1 К, получим очень много энергии.

Второе начало термодинамики (формулировка 2)
Процесс передачи энергии от горячего тела к холодному необратим.

Второе начало термодинамики (формулировка Клаузиуса)
Невозможно перевести тепло от более холодной системы к более горячей при отсутствии одновременных изменений в обеих системах или окружающих телах.

Второе начало термодинамики (формулировка Кельвина)
Невозможно осуществить такой периодический процесс, единственным результатом которого было бы получение работы за счёт теплоты, взятой от одного источника.

5.4 Тепловые двигатели

Тепловой двигатель – устройство, преобразущее U в механическую работу. У тепловой машины должны быть рабочее тело, нагреватель и холодильник. Температура нагревателя обозначается T_1, а холодильника – T_2. Тепловая машина должна работать циклически.

КПД теплового двигателя – отношение совершеннной машиной работы к теплу, полученному от нагревателя.

$$\eta = \frac{A}{Q_1}$$

Идеальный тепловой двигатель – двигатель, работающий по циклу Карно.

Цикл Карно – цикл, состоящий из двух адиабат (4-1 и 2-3) и изотерм (1-2 и 3-4) (см. рис. 1).

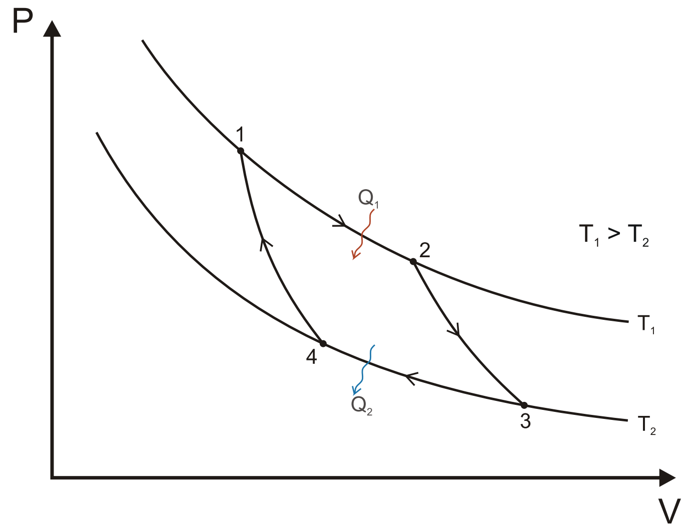

Рис. 1: Цикл Карно

КПД теплового двигателя, работающего по циклу Карно, равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Доказательство. Рассмотрим открытую систему, состоящую из рабочего тела в двигателе. Её работа равна

$$A = \oint \delta A = \oint (\delta Q - \mathrm{d}U) = \oint T\mathrm{d}S - \oint \mathrm{d}U = \oint T\mathrm{d}S$$

Заметим, что изменение энтропии во время процессов 4-1 и 2-3 равно 0, и, очевидно, изменение терметатуры во время процессов 1-2 и 3-4 – 0. Значит, график процесса в координатах TS – прямоугольник, следовательно:

$$A = \Delta T \cdot \Delta S = (T_1 - T_2) \cdot \frac{Q_1}{T_1} \Rightarrow \eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{(T_1 - T_2)Q_1}{Q_1 \cdot T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

∎

Холодильный коэффициент – отношение полученной от холодильника теплоты к работе, совершенной над рабочим телом.

$$\epsilon = \frac{Q_2}{-A}$$

Для идеальной холодильной машины выполняется:

$$\epsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

Доказательство.

$$\epsilon = \frac{Q_2}{-A} = \frac{A - Q_1}{-A} = \frac{A - \frac{A}{\eta}}{-A} = \frac{1-\eta}{\eta} = \frac{\frac{T_2}{T_1}}{\frac{T_1 - T_2}{T_1}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

∎

Теорема Карно

Максимальный КПД теплового двигателя равен

$$\eta_{max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Доказательство. Рассмотрим цикл, по которому работает двигатель, в координатах TS. КПД двигателя в таких координатах – это отношение площади фигуры к площади под верхней огибающей.

Заменим нижнюю огибающую графика на часть цикла Карно с такими же T_1, T_2, S_1, S_2 (преобразование 1). Очевидно, что КПД двигателя работающего по такому новому больше или равен КПД изначального двигателя (т. к. при этом преобразовании увеличился (либо остался равен) числитель дроби при неизменном знаменателе).

Теперь заменим верхнюю огибающую цикла на оставшуюся часть цикла (преобразование 2).

$$\eta_2 \vee \eta_3$$

$$\frac{a}{b} \vee \frac{a+x}{b+x}$$

$$\frac{a}{b} \vee \frac{a+x}{b+x}$$
$$a \cdot (b+x) \vee (a+x) \cdot b$$
$$a \cdot x \vee b \cdot x$$
$$a \leqslant b$$
$$\eta_2 \leqslant \eta_3$$

TODO: рисунок преобразований ■

5.5 Теплоёмкость

Теплоёмкость – отношение переданного телу количества теплоты к изменению его температуры. $[\frac{\text{Дж}}{\text{К}}]$

$$C = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}$$

Удельная теплоёмкость – теплоёмкость 1 кг вещества. $[\frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{моль}}]$
Молярная теплоёмкость – теплоёмкость 1 моль вещества. $[\frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{моль}}]$

$$c = \frac{C}{m}; \quad C_\nu = \frac{C}{\nu}; \quad C_\nu = cM$$

Политропный процесс – равновесный процесс с постоянной теплоёмкостью.
Предельные случаи: адиабатный процесс ($\delta Q = 0$, $C = 0$) и изотермический процесс ($\mathrm{d}T = 0$, $C = +\infty$).

Для газа выполняется

$$C_\nu = \frac{\mathrm{d}U}{\nu \mathrm{d}T} + \frac{p\mathrm{d}V}{\nu \mathrm{d}T}$$

Доказательство.

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A$$
$$\frac{\delta Q}{\nu \mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}U}{\nu \mathrm{d}T} + \frac{\delta A}{\nu \mathrm{d}T}$$
$$C_\nu = \frac{\mathrm{d}U}{\nu \mathrm{d}T} + \frac{p\mathrm{d}V}{\nu \mathrm{d}T}$$

■

Молярная теплоёмкость в изохорном процессе равна

$$C_V = \frac{i}{2}R$$

Доказательство.

$$\mathrm{d}V = 0 \Rightarrow C_V = \frac{dU}{\nu \mathrm{d}T} = \frac{\frac{i}{2}\nu R \mathrm{d}T}{\nu \mathrm{d}T} = \frac{i}{2}R$$

■

Соотношение Майера
Молярная теплоёмкость в изобарном процессе равна

$$C_p = C_V + R$$

Доказательство.

$$p = \text{const} \;\Rightarrow\; p\mathrm{d}V = \nu R\mathrm{d}T \;\Rightarrow\; C_p = \frac{\mathrm{d}U}{\nu \mathrm{d}T} + \frac{p\mathrm{d}V}{\nu \mathrm{d}T} = C_V + \frac{\nu R\mathrm{d}T}{\nu \mathrm{d}T} = C_V + R$$

■

Формула для ЕГЭ: по определению внутренней энергии

$$U = \frac{i}{2}\nu RT = \nu C_V T$$

5.6 Уравнение политропного процесса

Уравнение политропного процесса

$$pV^{\alpha} = \text{const, где } \alpha = \frac{C_p - C_\nu}{C_V - C_\nu}$$

Доказательство.

$$\mathrm{d}U = U_1 - U_0$$

$$\nu R\mathrm{d}T = \nu RT_1 - \nu RT_0 = (p + \mathrm{d}p)(V + \mathrm{d}V) - pV = p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p + \mathrm{d}p\mathrm{d}V = p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p$$

TODO

■

Уравнение адиабатного процесса

$$pV^{\lambda} = \text{const, где } \lambda = \frac{C_p}{C_V}$$

λ называют показателем адиабаты или коэффициентом Пуассона.

Доказательство.

$$Q = 0 \;\Rightarrow\; C_\nu = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \alpha = \frac{C_p - C_\nu}{C_V - C_\nu} = \frac{C_p}{C_V}$$

■

В случае идеального газа $\lambda = \dfrac{C_p}{C_V} = \dfrac{\frac{i}{2}R}{\frac{i+2}{2}R} = \dfrac{i+2}{i}$.

Работа газа при изотермическом процессе

$$A = \nu RT \cdot \ln\frac{V_2}{V_1}$$

Доказательство.

$$A = \int \delta A = \int_{V_1}^{V_2} p \mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} \mathrm{d}V = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = \nu RT(\ln V_2 - \ln V_1) = \nu RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

■

6 Жидкости и газы

Парообразование – процесс перехода тела из жидкого агрегатного состояния в газообразное.
Испарение – процесс парообразования с поверхности жидкости при любой температуре.
Кипение – процесс парообразования во всём объеме жидкости, который происходит, если давление насыщенных паров равно давлению жидкости в данной точке.
Температура кипения – температура, при которой происходит кипение при данном давлении.
Динамическое равновесие – процесс испарения и конденсации, при котором эти процессы компенсируют друг друга.
Насыщенный пар – пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью.
(Абсолютная) максимальная влажность – плотность насыщенного пара при данной температуре, обычно выраженная в $\frac{\text{г}}{\text{моль}}$.
Критическая температура – минимальная температура, при которой невозможно перевести пар в состояние насыщения.
Критическая точка – состояние вещества, при котором нет различий между жидкостью и её насыщенным паром.
Относительная влажность – отношение плотности данного пара к плотности насыщенного пара при данной температуре, обычно выраженное в процентах.

$$\phi = \frac{p_0}{p_{max}}$$

Точка росы – температура, до которой должен охладиться пар для достижения насыщения.
Теплота парообразования – количество теплоты, необходимое для превращения данной массы жидкости в пар этой же температуры.
Удельная теплота парообразования – отношение теплоты парообразования к массе жидкости.

$$L = \frac{Q_\text{п}}{m}$$

TODO: факторы кипения и испарения, разные изотермы, [Барометрическая формула].

7 Поверхностное натяжение

7.1 Сила поверхностного натяжения

Поверхностная энергия – избыточная потенциальная энергия, которой обладают молекулы на поверхности жидкости вследствие статистически меньшего расстояния до соседних молекул.
Коэффициент поверхностного натяжения – работа внешних сил, необходимая для изменения площади поверхности жидкости на единицу площади. $[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}, \frac{\text{Н}}{\text{м}}]$

$$\sigma = \frac{A_{\text{вн}}}{\Delta S}$$

Для $T = T_{\text{кр}}$ $\sigma = 0$, т. к. нет различия между жидкостью и газом. Жидкость стремится принять такую форму, чтобы минимизировать свою потенциальную энергию. Например, при отсутствии внешних сил эта форма – шар.
Сила поверхностного натяжения – сила, действующая по касательной к поверхности жидкости, стремящаяся минимизировать потенциальную энергию тела.
Поверхностное натяжение – явление возникновения силы поверхностного натяжения.

Для каждой точки контура на поверхности жидкости сила поверхностного натяжения направлена перпендикулярно касательной к контуру в плоскости контура, а сумма модулей сил поверхностного натяжения для контура длины l равна

$$F = \sigma l$$

Доказательство. TODO ■

Формула Лапласа
Добавочное давление в точке поверхности равно

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \text{ где } R_1 \text{ и } R_2 \text{ – радиусы главных кривизн.}$$

Радиус кривизны берётся с плюсом, если жидкость выгнута наружу в окружающую среду; иначе, если вогнута внутрь жидкости, с минусом.

Доказательство. TODO: рисунок
Рассмотрим криволинейный прямоугольник окрестности некоторой точки поверхности жидкости. Обозначим его длины сторон за $\mathrm{d}l_1$ и $\mathrm{d}l_2$, а радиус кривизны сторон за R_1 и R_2.

$$\mathrm{d}l_1 = \alpha_1 R_1;\ \mathrm{d}l_2 = \alpha_2 R_2$$

Восстановим нормаль к поверхности в данной точке и найдём проекцию сил натяжения на ось, сонаправленную с нормалью:

$$F_{n2} = -2F_2 \cdot \sin\frac{\alpha_1}{2} = -2\sigma \mathrm{d}l_2 \frac{\alpha_1}{2} = -\sigma R_2 \alpha_1 \alpha_2$$

$$F_{n1} = -2F_1 \cdot \sin\frac{\alpha_2}{2} = -2\sigma \mathrm{d}l_1 \frac{\alpha_2}{2} = -\sigma R_1 \alpha_1 \alpha_2$$
$$F = -(F_{n_1} + F_{n_2})$$

$$\Delta p \cdot \mathrm{d}l_1 \cdot \mathrm{d}l_2 = \sigma\alpha_1\alpha_2(R_1 + R_2)$$
$$\Delta p \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot R_1 \cdot R_2 = \sigma\alpha_1\alpha_2(R_1 + R_2)$$
$$\Delta p \cdot R_1 \cdot R_2 = \sigma(R_1 + R_2)$$
$$\Delta p = \sigma\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$
$$\Delta p = \sigma(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$$

■

7.2 Явления на границах раздела

Смачивание – явление, при котором силы взаимодействия между жидкостью и твёрдой поверхностью больше, чем силы взаимодействия между частицами самой жидкости.
На границе раздела двух сред есть свой коэффициент поверхностного натяжения σ_{ij}.
В случае состояния равновесия силы приложенные к точке, где встречаются рассматриваемые среды, должны компенсироваться; если такое невозможно, то состояния равновесия не будет. Например, если для двух жидкостей и газа $\sigma_{13} > \sigma_{23} + \sigma_{12}$, то жидкость 2 растечётся мономолекулярным слоем, т. е. жидкость 1 полностью смачивается жидкостью 2.
Краевой угол смачивания – угол, который образуется между касательной, проведённой к поверхности фазы жидкость-газ и твёрдой поверхностью с вершиной, располагающейся в точке контакта трёх фаз, и условно измеряемый всегда внутрь жидкой фазы.
Мениск – изогнутая поверхность жидкости.
Капиллярные явления – подъём или опускание жидкости в узких трубках по сравнению с уровнем жидкости в широких трубах.

Косинус краевого угла смачивания равен

$$\cos\theta = \frac{\sigma_{2\text{т}} - \sigma_{1\text{т}}}{\sigma_{12}}$$

Доказательство. Для твердого тела и двух других несмешиваемых сред в состоянии равновесия проекция силы на касательную к поверхности твердого тела обращается в 0. Соответственно,

$$\sigma_{1\text{т}} \cdot \mathrm{d}l + \sigma_{12}\cos\theta \cdot \mathrm{d}l = \sigma_{2\text{т}} \cdot \mathrm{d}l$$
$$\cos\theta = \frac{\sigma_{2\text{т}} - \sigma_{1\text{т}}}{\sigma_{12}}$$

■

В капилляре радиусом r, для которого угол краевого смачивания θ, жидкость поднимется (опустится) на высоту

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$$

Доказательство. Радиус кривизны жидкости в капилляре $R = \dfrac{r}{\cos\theta}$

$$\Delta p + \rho g h = 0$$

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho g h$$

$$\frac{2\sigma\cos\theta}{r} = \rho g h$$

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$$

■

Заметим, что из этой теоремы очевидно, что в капиллярах, смачиваемых жидкостью, она поднимается, а в несмачиваемых – опускается.

8 Деформации твёрдого тела

Относительное удлинение – отношение абсолютного удлинения к длине тела.
Коэффициент Пуассона – отношение относительного удлинения по поперечной оси к относительному удлинению по продольной, взятое со знаком минус.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l};\ \mu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$

Механическое напряжение – отношение проекции силы на нормаль сечения к площади сечения. [Па]
Модуль Юнга – отношение механического напряжения к относительному удлинению (свойство вещества). [Па]

$$\sigma = \frac{F}{S} = E\varepsilon$$

Объёмная плотность энергии – отношение потенциальной энергии упругой деформации к объёму тела. [Па]

$$W = \frac{E_{\text{п}}}{V} = \frac{k\Delta l^2}{2V} = \frac{ES\Delta l^2}{2lV} = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

Предел прочности – максимальное механическое напряжение, которое способен выдержать материал, не разрушаясь.
TODO: график напряженности от относительного удлинения.

9 Электростатика

9.1 Основные понятия

Электрический заряд – скалярная физическая величина, характеризующая способность тела вступать в электромагнитные взаимодействия.
Кулон – заряд, который протекает по проводнику с силой тока 1 А за 1 с.
Элементарный электрический заряд – заряд одного протона или заряд одного электрона, взятый со знаком плюс.

$$e = 1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}$$

Закон сохранения заряда
В замкнутой системе $\sum q_i = \text{const}$.

Электризация – явление перераспределения заряда.
Ион – заряженная частица.
Точечный заряд – заряженное тело с пренебрежимо малыми размерами.

Закон Кулона
Для точечных зарядов модуль силы взаимодействия прямо пропорционален модулю зарядов и обратно пропорционален квадрату расстояния между ними.

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2} = k\frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}$$

Где ε_0 – электрическая постоянная, k – коэффициент пропорциональности в законе Кулона.

$$\varepsilon_0 = 8.854\,187\,812\,8(13) \cdot 10^{-12}\ \tfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2};\ \ k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9\ \tfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

Принцип суперпозиции

1. При фиксированном распределении зарядов на всех телах силы электростатического (кулоновского) взаимодействия между любыми двумя телами не зависят от наличия других заряженных тел.
2. Силы кулоновского взаимодействия складываются векторно, не влияя друг на друга.

Напряженность – векторная физическая величина, силовая характеристика э/м поля, численно равная отношению силы, с которой данное поле в данной точке пространства будет действовать на внесённый пробный точечный положительный заряд к величине этого заряда.
Напряженность поля с единственным зарядом равна

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Силовая линия – воображаемая линия, к которой напряженность поля в каждой точке, принадлежащей ей, является касательной.

1. Силовые линии не пересекаются.
2. Силовые линии начинаются и заканчиваются на заряженных телах.
3. Силовые линии направлены от положительного заряда к отрицательному.

Электрический диполь – система двух одинаковых по модую разноимённых зарядов, расположенных на расстоянии l друг от друга.
Дипольный момент – произведение модуля заряда одной из заряженных частиц диполя на вектор, модуль которого l, направленный от отрицательно заряженной частицы к положительно заряженной. [Кл $\cdot$ м]

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

Поток вектора – скалярное произведение вектора величины на вектор площади, которую данная величина пронизывает. Т. е. это функция от произольной ориентированной поверхности, возвращающая число.

$$\Phi_X = \oiint\limits_S \vec{X} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Замечание. $\oiint_S$ – интеграл по всем точкам поверхности S, $\oint_L$ – интеграл по всем точкам замкнутой кривой L.

9.2 Теорема Гаусса

Теорема Гаусса
Поток вектора напряженности через любую замкнутую поверхность пропорционален заключённому внутри этой поверхности электрическому заряду.

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$$

Доказательство. TODO ∎

TODO: те самые "маленькие теоремы-следствия"из Гаусса

Сила нормального действия электрического поля на пластину S, которую пронизывает поток Φ, с поверхностной плотностью заряда σ равна

$$F_n = \Phi\sigma$$

Доказательство.

$$\Phi = \oiint\limits_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint\limits_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint\limits_S |\vec{E}| \cdot \mathrm{d}S \cdot \cos\alpha = \oiint\limits_S E_{in} \mathrm{d}S = \oiint\limits_S \frac{F_{in}}{\sigma \mathrm{d}S} \mathrm{d}S = \oiint\limits_S \frac{F_{in}}{\sigma} = \frac{F_n}{\sigma}$$

$$F_n = \Phi\sigma$$

∎

9.3 Потенциалы

Работа э/с поля точечного заряда Q при перемещении другого заряда q из положения A в положение B равна

$$A = kqQ\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Где r_A и r_B – расстояния между зарядами в положениях A и B, соответственно.

Доказательство.

$$A = \int_A^B F \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B \left(\frac{k \cdot q \cdot Q}{r^3}\vec{r}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = kqQ \cdot \int_A^B \frac{\vec{r}\mathrm{d}\vec{r}}{r^3} = kqQ\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_A^B = kqQ\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

■

Из последней теоремы следует, что работа при перемещении заряда не зависит от траектории $\Rightarrow$ кулоновская сила консервативна. Из-за свойства аддитивности э/с поля следует, что этот вывод справедлив для любой системы. Соответственно, можно говорить о потенциальной энергии взаимодействия э/с поля с зарядом.

Электростатический потенциал – скалярная физическая величина, энергетическая характеристика э/с поля, численно равная отношению потенциальной энергии взаимодействия пробного точечного положителельного заряда с этим полем к величине этого заряда. [$\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$, В]

Эквипотенциальные поверхности – поверхности, потенциал в каждой точке которых равен.

- Потенциал в любой точке пространства подчиняется свойству простой аддитивности.
- Эквипотенциальные поверхности замкнуты.
- Эквипотенциальные поверхности повторяют форму заряда (в частных случаях подобны).

По определению, потенциал равен работе поля по перемещению заряда из данной точки в точку с нулевым потенциалом, делённую на величину этого заряда. Обычно за нулевой уровень потенциальной энергии принимается точка, бесконечено удалённая от системы.

Потенциал точки на расстоянии r от уединённого точечного заряда Q равен

$$\varphi = \frac{kQ}{r}$$

Доказательство.

$$\varphi = \frac{E_\text{п}}{q} = \frac{-A_{+\infty\to r}}{q} = -\frac{kQq}{q}\left(\frac{1}{+\infty} - \frac{1}{r}\right) = \frac{kQ}{r}$$

■

Градиент – вектор, своим направлением указывающий направление наибольшего возрастания некоторой скалярной величины, модуль которого пропорционален скорости роста этой величины.

$$(\mathrm{grad}\ f)(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Напряженность э/с поля равна минус градиенту потенциала этого поля.

$$E = -\operatorname{grad}\varphi$$

Доказательство. Понятно, что из-за аддитивности градиента (из-за аддитивности частной производной) и э/с поля, для доказательства теоремы достаточно показать справедливость равенства для поля уединённого точечного заряда.
Введём систему координат так, чтобы её центр совпадал с точечным зарядом, тогда:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{kQ}{r}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{kQ}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{kQ}{-2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1.5}}\cdot 2x = \frac{kQ}{-\left(r^2\right)^{1.5}}\cdot x = -\frac{kQ}{r^3}\cdot x$$

Аналогично для производных по y и z.

$$-\operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right) = -\left(-\frac{kQ}{r^3}\cdot x,\ -\frac{kQ}{r^3}\cdot y,\ -\frac{kQ}{r^3}\cdot z\right) = \frac{kQ}{r^3}\cdot(x,\ y,\ z) = \frac{kQ}{r^3}\cdot\vec{r} = E$$

■

Т. к. линии уровня функции перпендикулярны градиенту, а силовые линии параллельны градиенту, то эквипотенциальные поверхности в любой точке перпендикулярны соответствующим силовым линиям э/с поля.

Если принять нулевой уровень потенциальной энергии на расстоянии q от бесконечной равномерно заряженной пластины, то потенциал в точке на расстоянии x равен

$$\varphi(x) = -\frac{\sigma(x-q)}{2\varepsilon_0}$$

В частности, если нулевой уровень находится на плоскости пластины, то $\varphi(x) = -\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}$.

Доказательство. TODO ■

Если принять нулевой уровень потенциальной энергии на расстоянии q от бесконечной равномерно заряженной нити, то потенциал в точке на расстоянии x равен

$$\varphi(x) = \frac{k\tau}{2}\cdot\ln\frac{q}{x}$$

Доказательство. TODO ■

Напряжение между двумя точками – работа всех сил по перемещению пробного заряда из одной точки в другую, делённая на величину этого заряда. [В]

9.4 Диэлектрики в электрическом поле

Из-за особенностей своей структуры (кажется, это называется "поляризация"), диэлектрики изменяют внешнее электрическое поле. В некотором приближении, они только ослабляют поле внутри себя. Отметим, что это не всегда работает так (даже в нашей модели), потому что наличие таких областей с ослабленным полем нарушает утверждение о консервативности э/с силы (если диэлектрик не центрально симметричен).

Относительная диэлектрическая проницаемость – скалярная величина, показывающая во сколько раз диэлектрик ослабляет внешнее электрическое поле внутри себя.

$$\varepsilon = \frac{|E_{\text{внешнее}}|}{|E_{\text{результ.}}|}$$

Если диэлектрик занимает всё пространство, то это значит, что результирующие силы, действующая на заряженные частицы, будут в ε раз меньше, а значит, потенциал и напряженность в каждой точке тоже будут в ε раз меньше.

9.5 Электрическая ёмкость

В каждой точке проводника потенциал одинаков (иначе бы там был ток) $\Rightarrow$ потенциалом проводника называют потенциал в любой его точке.

Электрическая ёмкость – отношение заряда проводника к его потенциалу. $[\frac{\text{Кл}}{\text{В}}, \text{Ф}]$

Фарад – электрическая ёмкость, такая что проводник ёмкостью 1 Ф имеет потенциал 1 В при заряде 1 Кл.

Ёмкость конденсатора – отношение заряда на одной из обкладок конденсатора к напряжению между этой обкладкой и другой.

$$C = \frac{q}{\varphi}; \quad C = \frac{q}{U}$$

Т. к. φ и U уменьшаются в ε раз, если всё пространство заполнено диэлектриком, то C увеличивается в ε раз в этом случае.

Величина заряда на обкладках конденсатора, находящего в цепи, всегда равна по модулю и противоположна по знаку (у меня до сих пор нет нормального объяснения).

Ёмкость проводящего шара радиусом r равна

$$C = \frac{\varepsilon r}{k}$$

Доказательство.

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{\varepsilon q r}{kq} = \frac{\varepsilon r}{k}$$

■

Ёмкость плоского конденсатора, у которого площадь обкладок S, расстояние между ними d, равна

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$$

Доказательство. Примем ноль потенциальной энергии на одной из обладок, тогда

$$\varphi_2 = -\frac{\sigma d}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{-\sigma d}{2\varepsilon\varepsilon_0} = -\frac{\sigma d}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{0 - \varphi_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 q}{\sigma d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 q}{\frac{q}{S}d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

■

Ёмкость сферического конденсатора с радиусами обкладок $r_1 > r_2$ равна

$$C = \frac{\varepsilon r_1 r_2}{k(r_1 - r_2)}$$

Доказательство.

$$\varphi_1 = \frac{kq}{\varepsilon r_1} + \frac{k(-q)}{\varepsilon r_1} = 0$$

$$\varphi_2 = \frac{kq}{\varepsilon r_1} + \frac{k(-q)}{\varepsilon r_2}$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{-\frac{kq}{\varepsilon r_1} + \frac{kq}{\varepsilon r_2}} = \frac{\varepsilon}{k\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)} = \frac{\varepsilon r_1 r_2}{k(r_1 - r_2)}$$

■

Энергия конденсатора – работа электрического поля при перемещении избыточного заряда с одной обкладки на другую. [Дж]

Для конденсатора с зарядом на обладке q, напряжением между обкладками U и ёмкостью C выполяется

$$W_п = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

Доказательство. Пусть a - потеницал, создаваемый отрицально заряженной обкладкой в точках положительно заряженной обкладки, если принять нулевой уровень на отрицальной обкладке. Т. к. обкладки обладают одинаковым по модулю зарядом, то они вносят равный вклад в разность потенциалов между ними $\Rightarrow$ $a = \frac{U}{2}$.

$$W_п = A_{поля} = -\Delta E_п = -(0 - q \cdot a) = qa = \frac{qU}{2} = \frac{q\frac{q}{C}}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

$$W_п = \frac{qU}{2} = \frac{(CU)U}{2} = \frac{CU^2}{2}$$

■

Объёмная плотность энергии – отношение энергии конденсатора к объёму, занимаемому им. $\left[\frac{Дж}{м^3}\right]$

$$\omega_e = \frac{W_п}{V}$$

Объёмная плотность энергии в конденсаторе

$$\omega_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$$

Доказательство. TODO ■

10 Постоянный ток

10.1 Электронная теория вещества

1. Свободные электроны в метале подчиняются законам идеального газа.
2. Движение свободных электронов подчиняется законам механики Ньютона.
3. Электроны не сталкиваются между собой, а сталкиваются только с ионами.
4. Электроны при столкновении с ионами передают свою кинетическую энергию последним полностью.

Опыты, подтверждающие теорию – опыт Рикке (1911), Мандельштама и Папалекси (1916), Толмена и Стюарта (1916).

11 Электрический ток в различных средах

11.1 Закон электролиза

11.2 Электрический ток в газах

11.3 Полупроводники

12 Магнитное поле

12.1 Основные понятия

Магнитное поле – вид материи, который возникает из-за движения заряженных частиц и который обнаруживается по действию на другие движущиеся заряженные частицы, в том числе токи и тела, обладающие магнитным моментом.

Сила Лоренца – сила, действующая на движущийся заряд со стороны магнитного поля.

Вектор магнитной индукции – силовая характеристика магнитного поля такая, что сила Лоренца со стороны этого поля, действующая на заряд q, движущийся со скоростью $\vec{v}$ в данной точке равна

$$\vec{F}_{\text{л}} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

Из определения следует, что единица измерения магнитной индукции – $\frac{\text{Н}}{\text{м} \cdot \text{А}}$.

Установлено, что сила Лоренца гироскопическая (её работа всегда равна 0) $\Rightarrow$ она всегда лежит в плоскости, перпендикулярной вектору скорости частицы $\Rightarrow$ такой вектор $\vec{B}$ всегда найдётся.

Магнитный момент – векторная физическая величина, характеризующая магнитные свойства вещества. $[\text{А} \cdot \text{м}^2]$

Для плоского контура площадью S с током I, вектор нормали для плоскости которого $\vec{n}$ (направление выбирается так, чтобы $\vec{B}_{\text{собств.}} \upuparrows \vec{n}$), магнитный момент вычисляется как:

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}$$

Элементарный контур с током может служить индикатором внешнего магнитного поля. Если размеры контура пренебрежимо малы, то он разворачивается так, чтобы его магнитный момент был сонаправлен с вектором магнитной индуции в данной точке.

Сила Ампера – сила, действующая со стороны магнитного поля на элемент тока.

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_{\text{а}} = [I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}]}$$

Доказательство. Сила Ампера – сумма сил Лоренца для всех частиц тока:

$$\vec{F}_{\text{л}} = \mathrm{d}q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

$$\vec{F}_{\text{л}} = [\mathrm{d}q \cdot \vec{v} \times \vec{B}]$$

$$\int \vec{F}_{\text{л}} = [\left(\int \mathrm{d}q \cdot \vec{v}\right) \times \vec{B}]$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{а}} = [\left(\int \frac{\mathrm{d}q \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t}\right) \times \vec{B}]$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{а}} = [\left(\int \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}]$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{а}} = [I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}]$$

■

Закон Био – Савара (эксперимент)
Вектор магнитной индукции, создаваемый элементом тока $d\vec{l}$, равен

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}]}{r^3} = k_1\frac{[I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}]}{r^3}$$

Где k_1 – коэффициент пропорциональности; μ_0 – магнитная постоянная, I – ток, текущий по элементу; $\vec{r}$ – вектор, началом которого является положение проводника, а концом – точка, в которой определяется индукция.

$$\mu_0 = 1.256\,637\,062\,12(19)\cdot 10^{-6}\,\tfrac{\text{Н}}{\text{м}^2};\;\; k_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \approx 10^{-7}\,\tfrac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

Поток магнитного поля (вектора магнитной индукции) через замкнутую поверхность равен

$$\Phi_B = 0$$

Доказательство. TODO? ■

Теорема о циркуляции
Циркуляция вектора магнитной индукции по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охваченных произвольной поверхностью, натянутой на этот контур, умноженной на магнитную постоянную.

$$\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$$

Доказательство. TODO? ■

Индукция магнитного поля бесконечного соленоида на его оси симметрии равна

$$|\vec{B}| = \mu_0 I\frac{N}{l} = \mu_0 I\rho$$

Где ρ – плотность намотки, т. е. число витков на единицу длины.

Доказательство. TODO ■

13 Электромагнетизм

13.1 Электромагнитная индукция

Поток вектора магнитной индукции для контура – поток вектора магнитной индукции через любую поверхность, натянутую на этот контур. Так как для любой замкнутой поверхности $\Phi_B = 0$, то этот поток не зависит от выбранной поверхности.

При определении магнитного потока через поверхность, её требуется ориентировать, после этого ориентируем и контур согласно правилу буравчика (2).

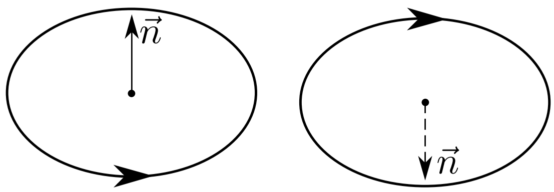

Рис. 2: Выбор направления обхода

Собственный магнитный поток контура – поток, вызываемый током в самом контуре.

Индуктивность контура – отношение собственного магнитного потока контура к току, протекающему в нём. $[\text{Гн} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}}]$

$$\Phi_\text{с} = LI$$

Закон электромагнитной индукции

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

где $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ называют скоростью изменения потока.

Самоиндукция – явление возникновения ЭДС в контуре при изменении силы тока или индуктивности.

$$\varepsilon_\text{с} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\text{с}}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}I$$

Правило Ленца

1. Индукционный ток направлен так, чтобы своим магнитным полем противодействовать изменению магнитного потока, которым он вызван.
2. Направление наведённой ЭДС всегда таково, что она пытается препятствовать причине, её вызывающей.

Рассмотрим пример (3). При удалении магнита, магнитный поток для контура уменьшается, тогда (используя первую формулировку) вектор магнитной индукции тока в контуре будет направлен направо $\Rightarrow$ ток течёт против часовой стрелки. (Используя вторую формулировку) Так как причина изменения потока – удаление магнита, то магнитное поле будет притягивать магнит к кольцу.

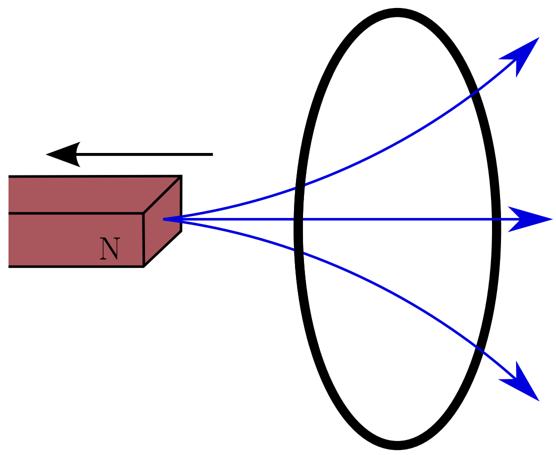

Рис. 3: Пример применения правила Ленца

Закон электромагнитной индукции в формулировке Фарадея
Для контура выполняется

$$q = \frac{\Phi_0 - \Phi_1}{R},$$

где q – ток, прошедший из-за изменения магнитного поля, R – сопротивление контура.

Доказательство.

$$-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \varepsilon = IR = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}R$$

$$-\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}qR$$

$$\int -\mathrm{d}\Phi = \int \mathrm{d}qR$$

$$q = \frac{\Phi_0 - \Phi_1}{R}$$

■

13.2 Индукция в движущемся проводнике

Для проводника, движущегося в магнитном поле справдливо

$$\varepsilon = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

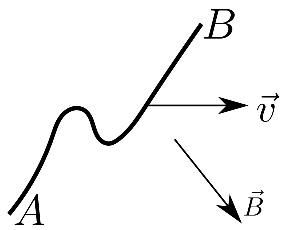

Рис. 4: Проводник

Доказательство. Пусть есть проводник, который движется в магнитном поле. Тогда по определению ЭДС,

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\int A_{\text{ст}}}{q} = \frac{\int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{q} = \frac{\int q((\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{q},$$

где $\vec{u}$ – скорость пробного заряда относительно проводника.

$$\varepsilon_{AB} = \int \left((\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} + (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} \right)$$

$$\varepsilon_{AB} = \int \left((\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \vec{B} \cdot (\vec{u} \times \mathrm{d}\vec{l}) \right)$$

$$\varepsilon_{AB} = \int \left((\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \vec{B} \cdot \vec{0} \right) = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

■

Если проводник движется поступательно в однородном магнитном поле, то последняя формула превщается в

$$\varepsilon_{AB} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{l}$$

Ещё более частные случаи этой формулы. Если проводник прямой и перпендикулярен плоскости, в которой содержатся $\vec{v}$ и $\vec{B}$, а между последними угол α, то

$$|\varepsilon_{AB}| = vBl \cdot \sin\alpha$$

Если проводник не перпендикулярен, но прямой и находится под углом β к плоскости, то

$$|\varepsilon_{AB}| = vBl \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta = vBl_{\text{экв.}} \cdot \sin\alpha$$

13.3 Переменное магнитное поле

Переменное магнитное поле создаёт вихревое электрическое поле.

Для осесимметричного магнитного поля

$$E_{\text{вихр.}} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{2\pi r \mathrm{d}t},$$

где $E_{\text{вихр.}}$ – напряжённость вихревого электрического поля, r – расстояние от центра симметрии.

Доказательство. Рассмотрим кольцо радиуса r в осесимметричном магнитном поле, причём оси симметрии кольца и поля совпадают. Тогда,

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_i = \frac{qE_{\text{вихр.},\, i} \cdot \mathrm{d}l_i}{q} = E_{\text{вихр.},\, i} \cdot \mathrm{d}l_i$$

Т. к. поле симметрично, то все $E_{\text{вихр.},\, i}$ равны.

$$\varepsilon = \int E_{\text{вихр.},\, i} \cdot \mathrm{d}l_i = E_{\text{вихр.}} \cdot 2\pi r$$

$$E_{\text{вихр.}} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{2\pi r \mathrm{d}t}$$

■

13.4 Ток в контурах с индуктивностью

Пусть есть катушка индуктивностью L и сопротивлением R, тогда при замыкании неё на источник с ЭДС ε сила тока в цепи будет подчиняться закону

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{tR}{L}}\right)$$

Доказательство. По второму закону Кирхгофа,

$$\varepsilon + \varepsilon_{SI} = IR$$

$$\varepsilon - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = IR$$

$$\mathrm{d}t = \frac{L\mathrm{d}I}{\varepsilon - IR}$$

$$\int \mathrm{d}t = L\int \frac{\mathrm{d}I}{\varepsilon - IR}$$

$$u = \varepsilon - IR; \quad \mathrm{d}u = -R\mathrm{d}I; \quad \mathrm{d}I = -\frac{\mathrm{d}u}{R}$$

$$t = -L\int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{R}}{u}$$

$$t = -\frac{L}{R}\ln u + c$$

$$t = -\frac{L}{R}\ln\left(\varepsilon - IR\right) + c$$

$$I = \frac{\varepsilon - e^{\frac{(-t+c)R}{L}}}{R}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - c_2 \cdot e^{\frac{-tR}{L}}\right)$$

В момент времени $t = 0$ с, $I = 0$ А:

$$0 = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - c_2 \cdot 1\right)$$

$$c_2 = 1$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{\frac{-tR}{L}}\right)$$

■

14 Переменный электрический ток

14.1 Трансформатор

Трансформатор – прибор переменного тока, который применяется для повышения или понижения напряжения, основан на явлении ЭМИ.
Коэффициент трансформации – отношение количество витков в первичной обмотке ко вторичной.

$$k = \frac{n_1}{n_2}$$

Здесь и далее будем считать, что мы рассматриваем идеальный трансформатор с количеством витков n_1 и n_2 на первичной и вторичной обмотках соответственно; индуктивности обмоток – L_1 и L_2; напряжение на источнике изменяется по закону $U_1 = \varepsilon(t) = \varepsilon_A \cos(\Omega t)$.

Отношение индуктивностей обмоток (без доказательства)

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$$

Отношение напряжений на обмотках идеального трансформатора равно коэффициенту трансформации.

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2} = k$$

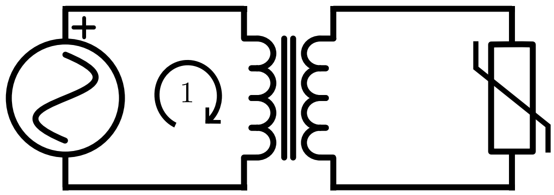

Рис. 5: Схема идеального трансформатора

Доказательство. Пусть ε_i - ЭДС самоиндукции в одном витке обмотки трансформатора. $\Phi_{\text{общ}}$ – поток, пронизывающий магнитопровод. Тогда согласно закону ЭМИ

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{общ}}}{\mathrm{d}t}$$

Закон Ома для первичной обмотки:

$$\varepsilon + n_1\varepsilon_i = 0$$

$$\varepsilon_i = -\frac{\varepsilon}{n_1}$$

$$U_2 = \varepsilon_2 = n_2\varepsilon_i = \varepsilon\frac{n_2}{n_1} = \frac{U_1}{k}$$

∎

Заметим, что схема трансформатора на холостом ходу – это индуктивность, подключённая к источнику. Соответственно, тогда сила тока в первичной обмотке

$$I(t) = \frac{\varepsilon_A}{X_L}\cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\varepsilon_A}{L\Omega}\sin(\Omega t)$$

При подключении ко вторичной обмотке в качестве нагрузки активного сопротивления R, сила тока в первичной обмотке задаётся как

$$I_1(t) = \frac{\varepsilon_A}{k^2 R}\cos(\Omega t) + \frac{\varepsilon_A}{L_1\Omega}\sin(\Omega t)$$

Доказательство. Из недоказанного утверждения:

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \Rightarrow L_2 = \frac{L_1 n_2^2}{n_1^2}$$

Из прошлого доказательства:

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{общ}}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{n_1} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{общ}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\int \frac{\varepsilon_A \cos(\Omega t)}{n_1}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\Phi_{\text{общ}}$$

$$\Phi_{\text{общ}} = \frac{\varepsilon_A \sin(\Omega t)}{\Omega n_1} + c \text{ (здесь надо поверить, что } c = 0)$$

Общий поток складывается из потоков двух катушек. (В формуле $\Phi = LI$ Φ – это поток через катушку, а не через сечение магнитопровода, чтобы получить последнее надо разделить его на n_i)

$$\Phi_{\text{общ}} = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\frac{\varepsilon_A \sin(\Omega t)}{\Omega n_1} = \frac{L_1 I(t)}{n_1} + \frac{L_2 I_2(t)}{n_2} = \frac{L_1 I(t)}{n_1} - \frac{L_2}{n_2}\frac{\varepsilon(t)}{Rk} = \frac{L_1 I(t)}{n_1} - \frac{L_1 n_2}{n_1^2}\frac{\varepsilon(t)}{Rk}$$

$$\frac{\varepsilon_A \sin(\Omega t)}{L_1 \Omega} = I(t) - \frac{n_2}{n_1}\frac{\varepsilon(t)}{Rk}$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon_A \cos(\Omega t)}{k^2 R} + \frac{\varepsilon_A \sin(\Omega t)}{L_1 \Omega}$$

■

Из последней теормы тривиально выводится амплитуда тока в первичной обмотке ($I_A = \varepsilon_A \sqrt{\frac{1}{L_1^2 \omega^2} + \frac{1}{k^4 R^2}}$) и сдвиг фазы тока относительно напряжения там же ($\Delta\phi = \arctan\left(\frac{k^2 R}{L_1 \Omega}\right)$). Отметим, что предложенный метод легко обобщается на случай произвольной ВАХ нагрузки, достаточно заменить преобразование $I_2(t)$ в выражение с $\frac{\varepsilon(t)}{k}$.

15 Фотометрия

15.1 Энергетические единицы

Энергия излучения – энергия, переносимая излучением. [Дж]
Поток излучения – энергия, переносимая излучением за единицу времени. [Вт]

$$\Phi_e = \frac{\mathrm{d}Q_e}{\mathrm{d}t}$$

Сила излучения – мощность, переносимая излучением в некотором направлении; отношение потока излучения, распространяющегося от источника излучения внутри малого телесного угла, к этому телесному углу. $[\frac{\text{Вт}}{\text{ср}}]$

$$I_e = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}\Omega}$$

Энергетическая светимость – мощность, переносимая излучением малого участка поверхности единичной площади. $[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}]$

$$M_e = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}S}$$

Энергетическая яркость – отношение потока излучения, испускаемого с бесконечно малой площадки источника и распространяющегося в бесконечно малом телесном угле, к площади проекции этой площадки на плоскость, перпендикулярную направлению распространения, и величине телесного угла. $[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{ср}}]$

$$L_e = \frac{\mathrm{d}^2\Phi_e}{\mathrm{d}S\cos\theta\cdot\mathrm{d}\Omega}$$

Для некоторой энергетической фотометрической величины X_e введём вспомогательную функцию $f_{X,\lambda}$, значение которой в точке λ будет равняться значению рассматриваемой величины X_e, если бы излучение состояло только из волн с длинами меньшими либо равными λ, тогда спектральной плотностью X_e с использованием длины волны как спектральной координаты будем называть

$$X_{e,\lambda} = \frac{\mathrm{d}f_{X,\lambda}}{\mathrm{d}\lambda}$$

Под спектральной плотностью с использованием частоты как спектральной координаты будем понимать аналогичное значение, где вместо длины волны используется частота:

$$X_{e,\nu} = \frac{\mathrm{d}f_{X,\nu}}{\mathrm{d}\nu}$$

Спектральные плотности для разных спектральных координат (длины волны и частоты) связаны следующим соотношением

$$X_{e,\lambda}(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2}X_{e,\nu}\left(\frac{c}{\lambda}\right)$$

Доказательство.

$$X_{e,\lambda}(\lambda) = \frac{\mathrm{d}f_{X,\lambda}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\left(X_e - f_{X,\nu}\left(\frac{c}{\nu}\right)\right)}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\mathrm{d}f_{X,\nu}\left(\frac{c}{\nu}\right)}{\mathrm{d}\nu}\cdot\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda} = X_{e,\nu}\left(\frac{c}{\lambda}\right)\cdot -\frac{\mathrm{d}\left(\frac{c}{\lambda}\right)}{\mathrm{d}\lambda} =$$
$$= X_{e,\nu}\left(\frac{c}{\lambda}\right)\cdot\frac{c\,\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2\,\mathrm{d}\lambda} = \frac{c}{\lambda^2}X_{e,\nu}\left(\frac{c}{\lambda}\right)$$

■

Для изотропного источника выполняется

$$M_e = \pi L_e$$

Доказательство. Рассмотрим бесконечно малую прямоугольную площадку $\mathrm{d}S$, радиус-вектор которой является нормалью к ней. Пусть её сферические координаты $(r,\ \theta,\ \phi)$.

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{r^2} = \frac{\mathrm{d}a \cdot \mathrm{d}b}{r^2} = \frac{r\,\mathrm{d}\theta \cdot r \sin\theta\,\mathrm{d}\phi}{r^2} = \mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$$

$$M_e = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}S} = \int \frac{\mathrm{d}^2\Phi_e}{\mathrm{d}S\cos\theta\,\mathrm{d}\Omega}\cos\theta\,\mathrm{d}\Omega = \int L_e \cos\theta\,\mathrm{d}\Omega =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} L_e \cos\theta \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = L_e \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\mathrm{d}\phi = \pi L_e$$

■

15.2 Световые единицы

Световая энергия – скалярная величина, характеризующая способность энергии, переносимой светом, вызывать у человека зрительные ощущения. [лм · с]
Световой поток – световая энергия, переносимая за единицу времени. [лм]

$$\Phi_v = \frac{\mathrm{d}Q_v}{\mathrm{d}t}$$

Сила света – световой поток, переносимый излучением в некотором направлении; отношение светового потока, распространяющегося от источника излучения внутри малого телесного угла, к этому телесному углу. [$\frac{\text{лм}}{\text{ср}}$ = кд]

$$I_v = \frac{\mathrm{d}\Phi_v}{\mathrm{d}\Omega}$$

Светимость – световой поток, переносимый излучением малого участка поверхности единичной площади. [$\frac{\text{лм}}{\text{м}^2}$]

$$M_v = \frac{\mathrm{d}\Phi_v}{\mathrm{d}S}$$

Яркость – отношение светового потока, испускаемого с бесконечно малой площадки источника и распространяющегося в бесконечно малом телесном угле, к площади проекции этой площадки на плоскость, перпендикулярную направлению распространения, и величине телесного угла. [$\frac{\text{кд}}{\text{м}^2}$]

$$L_v = \frac{\mathrm{d}^2\Phi_v}{\mathrm{d}S\cos\theta \cdot \mathrm{d}\Omega}$$

Спектральная световая эффективность монохроматического излучения $K(\lambda)$ – физическая величина, характеризующая чувствительность человеческого глаза к воздействию на него монохроматического света. [$\frac{\text{лм}}{\text{Вт}}$]
Относительная спектральная световая эффективность монохроматического излучения $V(\lambda)$ – отношение световой эффективности при заданной длине волны к максимальному значению световой эффективности.

$$K(\lambda) = K_m V(\lambda)$$

Кандела – сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, сила излучения которого в этом направлении составляет $\frac{1}{683}\ \frac{\text{Вт}}{\text{ср}}$.
Люмен – произведение канделы на стерадиан.

Из двух последних определений следует, что $K\left(\frac{c}{540 \cdot 10^{12}\ \text{Гц}}\right) = 683\ \frac{\text{лм}}{\text{Вт}}$. Также отметим, что при дневном зрении $K_m = 683\ \frac{\text{лм}}{\text{Вт}}$.

Для фотометрических световых единиц можно аналогично энергетическим едининцам ввести спектральные плотности, которые будем обозначать $X_{v,\lambda}$ и $X_{v,\nu}$.

15.3 Соответствие световых единиц и энергетических

Для фотометрической величины X_v по определению выполняется

$$X_v = \int X_{e,\lambda} K(\lambda) \mathrm{d}\lambda = K_m \int X_{e,\lambda} V(\lambda) \mathrm{d}\lambda$$

Энергетическая единица	**Обозначение**	**Световая единица**	**Обозначение**
Энергия излучения	Q_e, Дж	Световая энергия	Q_v, лм $\cdot$ с
Поток излучения	Φ_e, Вт	Световой поток	Φ_v, лм
Сила излучения	I_e, $\frac{\text{Вт}}{\text{ср}}$	Сила света	I_v, кд
Энергетическая светимость	M_e, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$	Светимость	M_v, $\frac{\text{лм}}{\text{м}^2}$
Энергетическая яркость	L_e, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{ср}}$	Яркость	L_v, $\frac{\text{кд}}{\text{м}^2}$

16 Квантовая физика

16.1 Энергия фотона

Электромагнитное излучение поглощается и испускается квантами – фотонами.
Постоянная Планка – коэффициент, связывающий энергию кванта электромагнитого излучения с его частотой. [Дж · с]

$$h = 6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с (точно)}$$

Так, фотон с частотой ν обладает энергией $h\nu$.

16.2 Излучение абсолютно черного тела

Закон Планка
Спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела температуры T равна

$$M_{e,\nu}(\nu) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Закон смещения Вина
Длина волны излучения АЧТ с максимальной интенсивностью равна

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T},$$

где $b = 0.002\,898$ м · К, T – температура тела.

Закон Стефана – Больцмана
Энергетическая светимость АЧТ равен

$$M_e = \sigma T^4$$

где σ – постоянная Стефана – Больцмана, T – температура тела.